DOI：10.16285/j.rsm.2023.1371

高置换率散体材料桩−不透水桩组合型复合地基非线性固结解析研究

孙锦鑫[1,2]，卢萌盟[1,2]，刘干斌[3]

（1. 中国矿业大学 力学与土木工程学院，江苏 徐州 221116；2. 中国矿业大学 深部岩土力学与地下工程国家重点实验室，江苏 徐州 221116；
3. 宁波大学 岩土工程研究所，浙江 宁波 315211）

摘 要：为加快固结排水速率并提高地基承载力，组合型复合地基加固技术被广泛应用于地基改良工程，而目前关于此类复合地基的非线性固结理论研究很少。通过对数模型来描述土体的非线性固结特征，并考虑桩−土压缩模量比随固结的变化，建立了散体材料桩−不透水桩复合地基非线性固结解析模型。此外，为减小研究高置换率复合地基固结时产生的计算误差，对传统假定进行修正，并引入新的流量连续性关系来考虑散体材料桩的固结变形。综合考虑散体材料桩井阻效应、桩体施工扰动效应和土体内径−竖向渗流，基于等应变假设和达西定律，推导了该模型的固结控制方程及其解析解。通过参数敏感性分析对复合地基非线性固结特性进行研究，分析了不同荷载形式下各参数对固结性状的影响。此外，与现有模型展开比较研究，并与实测数据进行对比分析，验证了该解答的正确性。结果表明：忽略散体材料桩的桩体固结变形会高估复合地基的固结速率，随着桩体置换率的增加，计算误差最大可达 10.5%；当压缩指数 C_c 小于渗透指数 $C_{kh(v)}$时，不考虑土体的非线性特征会低估地基固结速率；C_c/C_{kv} 的变化对固结速率的影响很小，与 C_c/C_{kh} 相比可以忽略不计；施工场地布置越密集、桩−土压缩模量比越大、散体材料桩渗透系数越大或扰动区半径越小，均会导致地基固结加快。

关 键 词：非线性固结；复合地基；散体材料桩；不透水桩；地基处理

中图分类号：TU 470 **文献标识码：**A **文章编号：**1000－7598 (2024) 08－2421－16

Nonlinear consolidation analysis for combined composite ground with high replacement ratio-granular columns and impervious columns

SUN Jin-xin[1,2], LU Meng-meng[1,2], LIU Gan-bin[3]

(1. School of Mechanics and Civil Engineering, China University of Mining and Technology, Xuzhou, Jiangsu 221116, China;
2. State Key Laboratory for Geomechanics and Deep Underground Engineering, China University of Mining and Technology, Xuzhou, Jiangsu 221116, China;
3. Institution of Geotechnical Engineering, Ningbo University, Ningbo, Zhejiang 315211, China)

Abstract: In order to enhance the ground strength and accelerate the consolidation rate, the technique of combined composite ground has been widely utilized in ground improvement projects. However, there are few theoretical investigations on the nonlinear consolidation behavior of this combined technique. To fill this gap, the logarithm models of are incorporated to describe the nonlinear consolidation characteristics of soils, then an analytical model for the nonlinear consolidation of composite ground with combined use of granular columns and impervious columns is established by accounting for the variation of the column-soil compression modulus ratio with consolidation. Further, the consolidation deformation of granular columns is considered by introducing a new flow continuity relationship. Based on the equal strain assumption and Darcy's law, the governing equations and analytical solutions are then obtained with consideration of the well resistance of granular columns, disturbance effects of both impervious columns and granular columns and the coupled radial-vertical seepage within soil. Moreover, the present solutions under different loading schemes are adopted to investigate the influence of several crucial parameters on the nonlinear consolidation behavior of composite ground. Furthermore, the accuracy of the current model is verified by comparing it with the existing solutions and applying it to analyze two tests. The results reveal that ignoring column consolidation deformation leads to an overestimate of consolidation rate, with maximum error reaching up to 10.5% as the replacement ratio increases. Neglecting the nonlinearity will underestimate the consolidation rate

收稿日期：2023-09-13 录用日期：2023-10-10
基金项目：国家自然科学基金（No. 52178373, No. 51878657）。
This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (52178373, 51878657).
第一作者简介：孙锦鑫，男，2000 年生，硕士研究生，主要从事地基处理方面的研究工作。E-mail：TS22030055A31LD@cumt.edu.cn
通讯作者：卢萌盟，男，1979 年生，博士，教授，主要从事软黏土力学与地基处理等方面的教学与研究工作。E-mail：lumm79@126.com

when the soil's compressive indices C_c are smaller than the permeability indices $C_{kh(v)}$. Additionally, the variation of C_c/C_{kv} has little influence on the consolidation rate and can be ignored when compared with C_c/C_{kh}. Factors such as a denser construction site layout, a higher column-soil compression modulus ratio, a larger permeability coefficient, or a smaller smear zone area of granular columns will accelerate the consolidation of composite ground.

Keywords: nonlinear consolidation; composite ground; granular column; impervious column; ground improvement

1 引 言

组合型复合地基能够充分利用不同属性桩体各自的优势形成互补效果，已在道路、机场、码头等软土地基处理工程中得到广泛应用[1-3]。这类复合地基主要由两种类型的桩体组成：强度较高的不透水桩和强度较低但排水性能较好的排水桩。以散体材料桩联合不透水桩组合型复合地基为例，不透水桩主要用于提高地基承载力，而散体材料桩则提供竖向排水通道来改善地基渗流路径[4-5]。目前，现场实测[6-8]、室内模型试验[9]和数值模拟[10]研究均表明，相较于传统单一桩型加固软土地基，散体材料桩−不透水桩复合地基增加了预压期的沉降量，可以有效提高固结效率，满足了工程施工和使用期间的承载力和变形要求。

除上述方法外，理论研究也是探究复合地基加固机制的有效手段，准确合理的固结沉降计算方法对工程实践具有重要的指导意义。近年来，通过借鉴一元复合地基固结理论的研究方法，组合型复合地基线性固结理论取得了一定进展[11-15]。Zhang 等[16]采用板−土均质化方法推导了组合型复合地基一维固结解析解，其本质上是对 Terzaghi 一维固结模型的扩展。在不考虑桩体施工扰动效应和排水板井阻的情况下，Ye 等[17]将排水板理想化为分析单元外围的连续排水边界，建立了水泥土搅拌桩−塑料排水板复合地基固结解析模型。Zhang 等[18]提出了一种长排水板−短不透水桩复合地基固结解析模型，建立以不透水桩为中心，多个排水板分布在外边界的分析单元。根据工程实践中施工场地的多种布置形式，Lu 等[19]采用不同的单元划分方法，提出了两种不同土体径向水流方向下的组合型复合地基固结解析模型。此外，当排水桩置换率较大时，计算时不考虑桩体固结变形将高估复合地基的整体固结速率。因此，于春亮[20]和卢萌盟[21]等从不同视角考虑了排水桩的固结变形，分别得出了内向水流形式下的散体材料桩−不透水桩复合地基固结解析解。武崇福等[22]以轴对称模型为基础，综合考虑碎石桩变形固结与附加应力随深度与时间变化等因素，推导了分级荷载形式下的碎石桩−CFG 桩复合地基固结解析解。

值得注意的是，上述组合型复合地基固结解析模型均忽略了固结过程中土体的非线性压缩和渗透特性。在工程实践中，复合地基土体的孔隙比会随着孔隙水的排出而逐渐减小，土体的压缩性和渗透性也会随之降低。大量试验研究表明，土体的孔隙比在对数坐标系下将随有效应力的增大而呈线性关系递减。目前，已有学者将土体非线性固结特性引入竖井地基固结理论中，对地基的非线性固结问题开展研究[23-25]。Lekha 等[26]利用 e-lgσ' 和 e-lg$k$ 对数模型，推导了单级加荷作用下理想竖井地基的非线性径向固结的简化解析解。Indraratna 等[27]也采用该对数模型建立了考虑竖井涂抹效应的地基径向固结解析模型。王洁等[28]提出了考虑变井阻效应情况下的竖井地基非线性固结解析模型。在 Lekha[26]和 Indraratna[27]等的研究基础上，Lu 等[29]进一步考虑了竖井井阻效应和土体径−竖向组合渗流等情况，给出了不同荷载形式下的竖井地基非线性固结普遍解。

然而，由于固结模型建立和数学推导的复杂性，关于复合地基非线性固结特性的研究一直很少[30-31]。周亚东等[32]基于分段线性有限差分法建立了碎石桩复合地基大变形非线性固结模型，并研究了自由应变和等应变条件下的复合地基非线性固结性状。卢萌盟等[33]在不考虑井阻和涂抹效应的情况下，建立了碎石桩复合地基非线性固结解析模型。赵明华等[34]考虑了碎石桩的井阻效应和桩体固结变形，得到了高置换率碎石桩非线性固结解析解。然而，上述研究均假设土体和碎石桩的压缩模量随固结等比例增长，这显然与工程实际不符。在固结过程中，土体的压缩模量会随着孔隙水的排出逐渐增大。而碎石桩桩体在成桩时已被处理得相对密实，其压缩模量随固结的增长很有限，并不会同步增大；相反，桩体在较大荷载下还有发生鼓胀变形的可能，其模量还会有减小的趋势。因此，桩−土压缩模量比会随着固结而减小，这会对复合地基固结速率产生重大影响，应在复合地基固结理论研究中予以考虑。

然而，由于处理桩体应力集中效应时较为复杂，目前关于组合型复合地基的非线性固结理论研究还很有限。针对上述问题，本文提出了一种散体材料桩−不透水桩复合地基非线性固结解析模型，考虑了

桩-土压缩模量比随固结的变化。此外，传统组合型复合地基固结理论往往只考虑了在桩体高压缩模量下的应力传递，却未深入研究高置换率散体材料桩的固结特点，这会造成较大的计算误差。因此，本文修正了传统桩-土界面流量相等假定，并引入新的流量连续性关系来考虑散体材料桩的固结变形。接着，本文根据面积等效原理，在分析单元中同时引入不透水桩和散体材料桩，这能够清晰反映工程实践中施工场地的多种布置形式，更符合实际工况。本文还考虑了散体材料桩的井阻效应，同时考虑桩体施工的扰动效应以及土体的径-竖向渗流。根据等应变假设和达西定律，推导得到了相应的固结解析解，并通过与已有模型和试验数据的对比验证了解析模型的合理性和正确性。最后，通过参数敏感性分析研究组合型复合地基的非线性固结性状，讨论了各参数对固结速率的影响。

2　计算模型的建立与描述

2.1　模型的建立

不透水桩可以提高软土地基的承载力，而散体材料桩则可以促进排水并加快地基固结速率。在实际工程中，散体材料桩-不透水桩组合型复合地基大多采用三角形、矩形等布置形式，如图 1 所示。此外，在施工进度较紧的情况下，也可根据三角形或矩形密集布置的方式来进行安装。

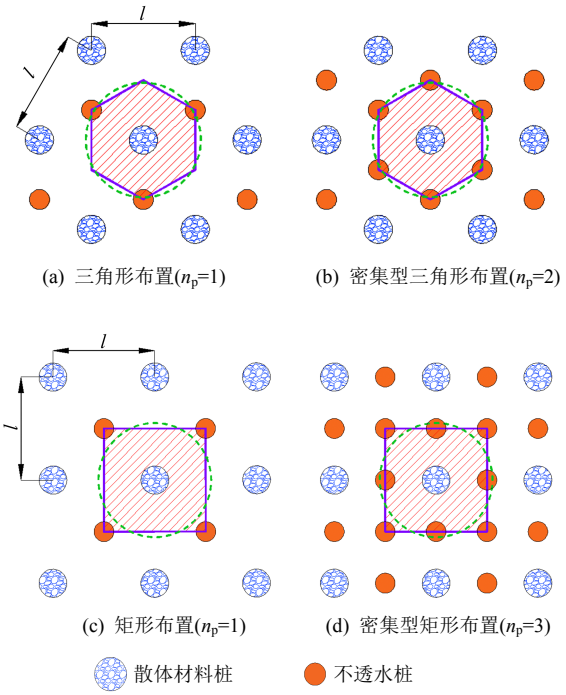


图 1　组合型复合地基施工场地布置方式

Fig.1　Various distribution patterns for the construction sites of combined composite ground

在传统的固结理论中，通常选取单个竖井作为分析单元来进行研究。然而，在工程现场一般会安装数百个散体材料桩或不透水桩，上述方法可能无法合理和准确预测实际的固结特征[19, 35]。针对这种问题，Lu 等[36]提出了一种新的解析模型来研究地基的固结规律。在该模型中，一个竖井位于单元中心，其余分布在外边界，且分析单元中的竖井数量与具体布置方式有关。参考这种方法，本文提出了一种新的散体材料桩-不透水桩复合地基非线性固结解析模型，建立以散体材料桩为中心，n_p 个不透水桩分布在外边界的分析单元。在这种单元划分规则下，孔隙水将在外荷载的作用下向内流入位于单元中心的散体材料桩。

这样，可以在分析单元中清晰地反映散体材料桩和不透水桩的分布规律，更符合实际工况。此外，每个位于单元外边界的不透水桩都是由该分析单元及其相邻分析单元共享，数量 n_p 则取决于其在散体材料桩周围布设的密度。以图 1(b)的分析单元为例，6 个不透水桩在单元内所占的面积总和等于 2 个完整的不透水桩的面积，因此 n_p 为 2。此外，对于三角形、矩形布置和矩形密集布置，n_p 分别为 1、1 和 3。

如图 2 所示，根据面积相等原则将地基单元转换为等效的圆柱分析单元。因此，当两个相邻散体材料桩的间距为 l 时，分析单元影响区半径 R_e 可以定义为

$$R_e^2=\frac{A_e^2}{\pi}=\frac{A_n^2-n_pA_p^2}{\pi} \tag{1}$$

式中：A_e 为影响区面积；A_n 为地基单元面积，对于矩形或矩形密集布置时，面积为 l^2，对于三角形或三角形密集布置时，面积为 $\sqrt{3}/2l^2$；A_p 为单个不透水桩的截面积；n_p 为单元外边界不透水桩的数量。

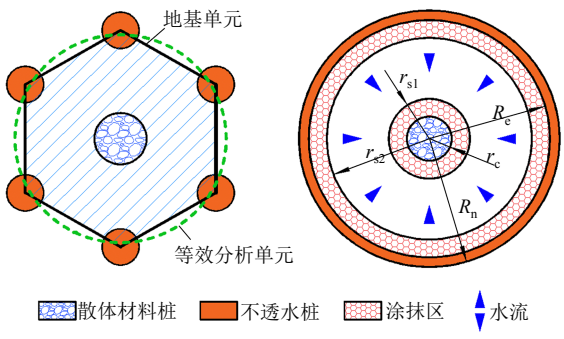


图 2　等效分析单元

Fig.2　Selection of the typical equivalence analysis unit

本文解析模型如图 3 所示，其中 r 为径向坐标，z 为纵坐标，H 为地基软土厚度，R_n 为地基分析单

元的半径，r_c 为单个不排水桩的横截面半径，$k_r(r)$ 为复合地基土体的水平渗透系数，k_v 为土体的竖向渗透系数，k_{s1} 和 k_{s2} 分别为散体材料桩和不透水桩引起的内、外扰动区土体的水平渗透系数。此外，本文还考虑了桩体施工时对周围土体的扰动效应，根据分析单元的划分规则，必然存在内、外两个扰动区。中心扰动区的半径 r_{s1} 等于单个散体材料桩扰动区的半径 r_{sc}；而因安装不透水桩形成的扰动区则被等效为邻近外边界的环形区，其半径大小取决于外边界不透水桩的数量：

$$r_{s2}=\sqrt{\frac{A_e-n_p A_{sp}}{\pi}} \tag{2}$$

式中：A_{sp} 为单个不透水桩的扰动区面积。

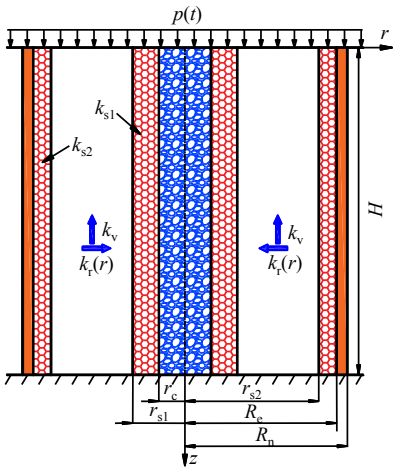


图 3 组合型复合地基非线性固结解析模型

Fig.3 Analytical model for the nonlinear consolidation of combined composite ground

2.2 基本假定

考虑到工程现场的实际情况及后续推导的方便，作出如下假设：

（1）在固结过程中复合地基土体的压缩性和渗透性呈非线性减小，因此，以下对数关系将被用于描述土体的非线性特征：

$$e=e_0-C_c\lg\frac{\bar{\sigma}_s'}{\bar{\sigma}_{s0}'} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned}e&=e_0+C_{kh}\lg\frac{k_h}{k_{h0}}\\ e&=e_0+C_{kv}\lg\frac{k_v}{k_{v0}}\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

式中：e、e_0 分别为土体的孔隙比和初始孔隙比；C_c、C_{kh}、C_{kv} 分别为土体的压缩指数、水平渗透指数和竖向渗透指数；k_h 为未扰动区土体的水平渗透系数；k_{h0}、k_{v0} 为土体的水平和竖向初始渗透系数；$\bar{\sigma}_s'$ 和 $\bar{\sigma}_{s0}'$ 分别为土体内的平均有效应力和初始有效应力，初始平均有效应力一般取土层的平均有效自重应力，而平均有效应力的表达式为

$$\bar{\sigma}_s'=\bar{\sigma}_{s0}'+\bar{\sigma}_{se}' \tag{5}$$

式中：$\bar{\sigma}_{se}'$ 为外荷载引起的土体内的平均有效应力。

（2）土体为均质单层的饱和土，土颗粒和孔隙水均不可压缩，复合地基发生变形仅是孔隙水排出的结果，且孔隙水渗流遵从 Darcy 定律。

（3）不透水桩和散体材料桩的压缩模量在固结过程中保持不变，忽略了桩−土之间的摩擦力以及桩体的侧向变形，且外荷载引发的附加应力随深度保持不变。

（4）等应变假定成立，复合地基单元仅发生竖向变形而无侧向变形，且在固结过程中土体、散体材料桩和不透水桩在同一深度任意点处的竖向变形量相等。

（5）从土体沿径向流入散体材料桩的水量不等于沿桩体竖直方向排出的水量，两者之间的差值即为散体材料桩在固结过程中的固结变形量。

以往的散体材料桩复合地基固结理论大多采用桩−土界面流量相等假定[37-38]，即任意时刻从桩周土体流入桩体的水量都等于流出桩体的水量，也就是说假设在固结过程中桩体中的水量保持不变。由于桩体材料和水不可压缩，桩体固结变形来源于桩内水量的变化，因此，桩−土界面流量相等假定即是规定桩体在固结过程中将保持恒定体积，意味着散体材料桩不会发生固结变形。而等应变条件假设桩体和土体均发生变形，且变形量在任一深度处相等，显然这两个假定是相互矛盾的。因此，本文提出了假定（5）来考虑散体材料桩桩体的固结变形，以此来克服传统流量相等假定和等应变假定之间的矛盾，并结合图 4 给出了详细的推导过程。

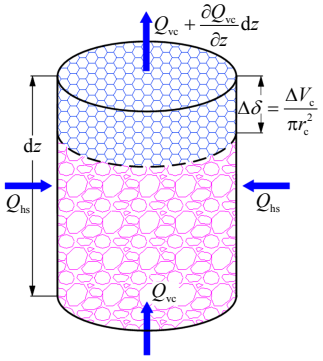


图 4 散体材料桩桩体体积变化与流量的关系

Fig.4 Relationship between volume change and flow of the granular column

在时间 dt 内沿竖直方向流出散体材料桩的水量Q_{vc}可以表示为

$$Q_{vc}=\frac{k_c}{\gamma_w}\frac{\partial \overline{u}_c}{\partial z}\pi r_c^2 \mathrm{d}t \tag{6}$$

式中：k_c为散体材料桩的竖向渗透系数；$\overline{u}_c$为散体材料桩在任一时刻任一深度处的超孔隙水压力；γ_w为水的重度。

在深度 dz 和时间 dt 内从桩周土体流入散体材料桩的水量Q_{hs}可计算为

$$Q_{hs}=-2\pi r_c \mathrm{d}z\mathrm{d}t\left[\frac{k_r(r)}{\gamma_w}\frac{\partial u_s}{\partial r}\right]\Bigg|_{r=r_c} \tag{7}$$

式中：$k_r(r)=k_h f(r)$，$f(r)$为描述土体水平渗透系数变化的函数：

$$f(r)=\begin{cases}\alpha_1, & r_c\leqslant r\leqslant r_{s1}\\ 1, & r_{s1}\leqslant r\leqslant r_{s2}\\ \alpha_2, & r_{s2}\leqslant r\leqslant R_e\end{cases} \tag{8}$$

式中：$\alpha_1=k_{s1}/k_h$；$\alpha_2=k_{s2}/k_h$。

因此，在时间 dt 散体材料桩桩体内水量的变化量ΔQ_c可表示为

$$\Delta Q_c=Q_{vc}-\left(Q_{vc}+\frac{\partial Q_{vc}}{\partial z}\mathrm{d}z\right)+Q_{hs} \tag{9}$$

进一步，在深度 dz 和时间 dt 时散体材料桩体积的变化量ΔV_c可以写成：

$$\Delta V_c=\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t}\pi r_c^2 \mathrm{d}z\mathrm{d}t \tag{10}$$

式中：ε_v为复合地基的体积应变，等于竖向应变ε_z。

由假定（5）可知$\Delta Q_c=\Delta V_c$，因此可得如下关系式：

$$-\frac{k_c}{\gamma_w}\frac{\partial^2 \overline{u}_c}{\partial z^2}-\frac{2}{r_c}\left[\frac{k_r(r)}{\gamma_w}\frac{\partial u_s}{\partial r}\right]\Bigg|_{r=r_c}=\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \tag{11}$$

3　控制方程的推导

本文所提出的组合型复合地基分析单元符合土体、不透水桩和散体材料桩共同承担外部荷载的原则，因此可得到如下的平衡方程：

$$(R_e^2-r_c^2)(\overline{\sigma}'_{se}+\overline{u}_s)+n_p r_p^2\overline{\sigma}'_{pe}+r_c^2(\overline{\sigma}'_{ce}+\overline{u}_c)=R_n^2 p(t) \tag{12}$$

$$\overline{u}=\frac{(R_e^2-r_c^2)\overline{u}_s+r_c^2\overline{u}_c}{R_n^2}=\frac{(N^2-1)\overline{u}_s+\overline{u}_c}{N^2+n_p N_{pc}^2} \tag{13}$$

式中：$\overline{u}_s$和$\overline{u}$分别为土体和复合地基任一时刻任一深度处的超孔隙水压力；$\overline{\sigma}'_{pe}$和$\overline{\sigma}'_{ce}$分别为不透水桩和散体材料桩由外部荷载所引起的平均有效应力；$p(t)=p_u g(t)$，$p(t)$为随时间变化的外部荷载，p_u为外部荷载的最终值，$g(t)$为描述外部荷载随时间变化的函数；$N=R_e/r_c$；$N_{pc}=r_p/r_c$，r_p为单个不透水桩的横截面半径。

在外部荷载施加前，组合型复合地基在初始应力下的变形已经完成。因此，由等应变假定可得荷载施加后的关系式：

$$m_{vs}\overline{\sigma}'_{se}=m_{vp}\overline{\sigma}'_{pe}=m_{vc}\overline{\sigma}'_{ce} \tag{14}$$

式中：m_{vs}、m_{vp}和m_{vc}分别为土体、不透水桩和散体材料桩的体积压缩系数。$E_s=1/m_{vs}$，$E_p=1/m_{vp}$，$E_c=1/m_{vc}$，E_s、E_p和E_c分别为土体、不透水桩和散体材料桩的压缩模量。需要说明的是，由假定（3）可知其中只有m_{vs}随固结变化。

结合式（12）、（14）可得

$$\left(n_p N_{pc}^2\frac{m_{vs}}{m_{vp}}+\frac{m_{vs}}{m_{vc}}+N^2-1\right)\overline{\sigma}'_{se}=(N^2+n_p N_{pc}^2)p(t)-\overline{u}_c-(N^2-1)\overline{u}_s \tag{15}$$

此外，m_{vs}在固结过程中随孔隙水的排出而变化，根据 Lu 等[29]的研究可以表示为

$$m_{vs}=-\frac{\mathrm{d}e}{(1+e_0)\mathrm{d}\overline{\sigma}'_s} \tag{16}$$

因此，根据式（3）、（4）和式（16），可得土体的竖向渗透系数k_v和水平渗透系数k_h以及体积压缩系数m_{vs}的表达式：

$$k_h=k_{h0}\left(\frac{\overline{\sigma}'_s}{\overline{\sigma}'_{s0}}\right)^{-\frac{C_c}{C_{kh}}} \tag{17}$$

$$k_v=k_{v0}\left(\frac{\overline{\sigma}'_s}{\overline{\sigma}'_{s0}}\right)^{-\frac{C_c}{C_{kv}}} \tag{18}$$

$$m_{vs}=\frac{C_c}{(1+e_0)\ln 10\overline{\sigma}'_s}=m_{vs0}\frac{\overline{\sigma}'_{s0}}{\overline{\sigma}'_s} \tag{19}$$

式中：$m_{vs0}=\dfrac{C_c}{(1+e_0)\ln 10\overline{\sigma}'_{s0}}$，$m_{vs0}$为土体的初始体积压缩系数。

结合式（5）、（15）和式（19）可得

$$\frac{N^2-1}{\bar{\sigma}'_{s0}}(\bar{\sigma}'_s)^2-(n_pN_{pc}^2K_{sp}+K_{sc})\bar{\sigma}'_{s0}+\left\{n_pN_{pc}^2K_{sp}+K_{sc}-(N^2-1)-\frac{N^2+n_pN_{pc}^2}{\bar{\sigma}'_{s0}}[p(t)-\bar{u}]\right\}\cdot\bar{\sigma}'_s=0 \tag{20}$$

式中：$K_{sp}=\dfrac{m_{vs0}}{m_{vp}}=\text{cons.}$，$K_{sc}=\dfrac{m_{vs0}}{m_{vc}}=\text{cons.}$。

求解式（20），可得土体内平均有效应力 $\bar{\sigma}'_s$ 的表达式为

$$\bar{\sigma}'_s=\frac{1}{2}\frac{N^2+n_pN_{pc}^2}{N^2-1}[p(t)-\bar{u}]+\frac{\sqrt{\left\{\lambda_1-\dfrac{N^2+n_pN_{pc}^2}{\bar{\sigma}'_{s0}}[p(t)-\bar{u}]\right\}^2+\lambda_2}-\lambda_1}{2(N^2-1)}\bar{\sigma}'_{s0} \tag{21}$$

式中：

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1&=n_pN_{pc}^2K_{sp}+K_{sc}-(N^2-1)\\ \lambda_2&=4(N^2-1)(n_pN_{pc}^2K_{sp}+K_{sc})\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

对式（21）进行求导可得

$$\frac{\partial\bar{\sigma}'_s}{\partial t}=\frac{1}{2}\eta(t)\frac{N^2+n_pN_{pc}^2}{N^2-1}\left[\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}-p_u\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t}\right] \tag{23}$$

式中：

$$\eta(t)=\frac{\lambda_1-\dfrac{N^2+n_pN_{pc}^2}{\bar{\sigma}'_{s0}}[p(t)-\bar{u}]}{\sqrt{\left\{\lambda_1-\dfrac{N^2+n_pN_{pc}^2}{\bar{\sigma}'_{s0}}[p(t)-\bar{u}]\right\}^2+\lambda_2}}-1 \tag{24}$$

根据等应变假定（3），复合地基应变率可以表示为

$$\frac{\partial\varepsilon_v}{\partial t}=-\frac{1}{1+e_0}\frac{\partial e}{\partial t}=m_{vs0}\frac{\bar{\sigma}'_{s0}}{\bar{\sigma}'_s}\frac{\partial\bar{\sigma}'_s}{\partial t} \tag{25}$$

平均有效应力 $\bar{\sigma}'_s$ 可以表示为初始平均有效应力和新增平均有效应力之和，即 $\bar{\sigma}'_s=\bar{\sigma}'_{s0}+p(t)-\bar{u}$。从固结开始到结束，$\bar{\sigma}'_s$ 由初始值 $\bar{\sigma}'_{s0}$ 增长到最终值 $\bar{\sigma}'_{s0}+p_u$。为简化计算，本文参考 Lekha[26]和 Indraratna[27]等的方法，将式（21）、（23）、（25）中的平均有效应力 $\bar{\sigma}'_s$ 用整个固结过程中的平均值 $\bar{\sigma}'_{sa}$ 代替。此时，式（25）变为

$$\frac{\partial\varepsilon_v}{\partial t}=m_{vs0}\frac{\bar{\sigma}'_{s0}}{\bar{\sigma}'_{sa}}\frac{\partial\bar{\sigma}'_{sa}}{\partial t}=\frac{m_{vs0}}{2}\frac{Y}{K}\frac{N^2+n_pN_{pc}^2}{N^2-1}\left[\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}-p_u\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t}\right] \tag{26}$$

式中：

$$Y=\frac{\lambda_1-\dfrac{N^2+n_pN_{pc}^2}{2}\dfrac{p_u}{\bar{\sigma}'_{s0}}}{\sqrt{\left\{\lambda_1-\dfrac{N^2+n_pN_{pc}^2}{2}\dfrac{p_u}{\bar{\sigma}'_{s0}}\right\}^2+\lambda_2}}-1 \tag{27}$$

$$K=\frac{1}{4}\frac{N^2+n_pN_{pc}^2}{N^2-1}\frac{p_u}{\bar{\sigma}'_{s0}}+\frac{\sqrt{\left\{\lambda_1-\dfrac{N^2+n_pN_{pc}^2}{2}\dfrac{p_u}{\bar{\sigma}'_{s0}}\right\}^2+\lambda_2}-\lambda_1}{2(N^2-1)} \tag{28}$$

参考谢康和等[39]的研究对等应变条件下竖井地基固结的研究，本文组合型复合地基固结的初始控制方程可以写为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{k_r(r)}{\gamma_w}r\frac{\partial u_s}{\partial r}\right]+\frac{k_v}{\gamma_w}\frac{\partial^2\bar{u}_s}{\partial z^2}=-\frac{\partial\varepsilon_v}{\partial t} \tag{29}$$

土体的平均超孔隙水压力 $\bar{u}_s$ 的表达式为

$$\bar{u}_s(z,t)=\frac{1}{\pi(R_e^2-r_c^2)}\int_{r_c}^{R_e}2\pi ru_s(r,z,t)\mathrm{d}r \tag{30}$$

复合地基分析单元中的中心散体材料桩与土体界面的超孔隙水压力相等，且单元影响区外边界不透水，因此径向边界条件为

$$r=R_e:\frac{\partial u_s}{\partial r}=0 \tag{31}$$

$$r=r_c:u_s=\bar{u}_c \tag{32}$$

对式（29）关于 r 积分，结合式（31）可得

$$\frac{\partial u_s}{\partial r}=\frac{(R_e^2-r^2)}{2rf(r)}\frac{\gamma_w}{k_h}\left(\frac{\partial\varepsilon_v}{\partial t}+\frac{k_v}{\gamma_w}\frac{\partial^2\bar{u}_s}{\partial z^2}\right) \tag{33}$$

利用式（32）对式（33）积分，结合式（30）可得

$$\bar{u}_s=\bar{u}_c+\frac{R_e^2F_c}{2}\frac{\gamma_w}{k_h}\left(\frac{\partial\varepsilon_v}{\partial t}+\frac{k_v}{\gamma_w}\frac{\partial^2\bar{u}_s}{\partial z^2}\right) \tag{34}$$

式中：F_c 为本文的重要参数，能够反映复合地基单元的几何特征以及桩体施工产生的扰动效应：

$$F_c=\frac{2(N^2\mu_1-\mu_2)}{N^2(N^2-1)} \tag{35}$$

式中：

$$\mu_1=\frac{N^2}{2\alpha_1}\ln s_1-\frac{s_1^2-1}{4\alpha_1}-\frac{s_2^2-s_1^2}{4}+\frac{N^2}{2}\ln\frac{s_2}{s_1}+\frac{N^2}{2\alpha_2}\ln\frac{N}{s_2}-\frac{N^2-s_2^2}{4\alpha_2} \tag{36}$$

$$\mu_2=\frac{(s_2^2-s_1^2)^2(2N^2-s_2^2-s_1^2)}{8}+\frac{(s_1^2-1)(2N^2-s_2^2-1)}{8\alpha_1}+\frac{(N^2-s_1^2)^2}{8\alpha_2} \tag{37}$$

式中：$s_1=r_{s1}/r_c$；$s_2=r_{s2}/r_c$。

将式（13）、（26）代入式（34），可得

$$(N^2+n_pN_{pc}^2)\overline{u}-N^2\overline{u}_c=\frac{R_e^2F_c}{2}\frac{\gamma_w}{k_h}\left\{\frac{m_{vs0}}{2}(N^2+n_pN_{pc}^2)\cdot\frac{Y}{K}\left[\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}-p_u\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t}\right]+\frac{k_v}{\gamma_w}\left[(N^2+n_pN_{pc}^2)\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial z^2}-\frac{\partial^2\overline{u}_c}{\partial z^2}\right]\right\} \tag{38}$$

结合式（11）、（33），得

$$N^2\frac{\partial\varepsilon_v}{\partial t}=-\frac{k_c}{\gamma_w}\frac{\partial^2\overline{u}_c}{\partial z^2}-(N^2-1)\frac{k_v}{\gamma_w}\frac{\partial^2\overline{u}_s}{\partial z^2} \tag{39}$$

将式（13）、（26）代入式（39），可得

$$\frac{\partial^2\overline{u}_c}{\partial z^2}=\varphi_1\left[\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}-p_u\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t}\right]+\varphi_2\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial z^2} \tag{40}$$

式中：

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1&=N^2\frac{m_{vs0}\gamma_w}{2(k_v-k_c)}\frac{Y}{K}\frac{N^2+n_pN_{pc}^2}{N^2-1}\\ \varphi_2&=(N^2+n_pN_{pc}^2)\frac{k_v}{k_v-k_c}\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

将式（40）代入式（38），可得

$$\overline{u}_c=\beta_1\overline{u}-\beta_2\left[\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}-p_u\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t}\right]-\beta_3\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial z^2} \tag{42}$$

式中：

$$\beta_1=\frac{N^2+n_pN_{pc}^2}{N^2} \tag{43}$$

$$\beta_2=-\frac{1}{N^2}\frac{R_e^2F_c}{2}\frac{m_{vs0}\gamma_w}{2k_h}\frac{k_v+(N^2-1)k_c}{k_v-k_c}\frac{N^2+n_pN_{pc}^2}{N^2-1}\frac{Y}{K} \tag{44}$$

$$\beta_3=-\frac{k_v}{k_h}\frac{R_e^2F_c}{2}\frac{N^2+n_pN_{pc}^2}{N^2}\frac{k_c}{k_v-k_c} \tag{45}$$

结合式（17）、（18）、（40）、（42），即可得本文的控制方程：

$$D_1\frac{\partial^4\overline{u}}{\partial z^4}+D_2\frac{\partial^3\overline{u}}{\partial z^2\partial t}+D_3\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial z^2}+\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}=p_u\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t} \tag{46}$$

式中：

$$D_1=-\frac{R_e^2F_c}{2}\frac{N^2-1}{N^4Y}\frac{2k_{v0}}{m_{vs0}\gamma_w}\frac{k_c}{k_{h0}}K^{1+\frac{C_c}{C_{kh}}-\frac{C_c}{C_{kv}}} \tag{47}$$

$$D_2=-\frac{1}{N^4}\frac{R_e^2F_c}{2}\left[\frac{k_{v0}}{k_{h0}}K^{\frac{C_c}{C_{kh}}-\frac{C_c}{C_{kv}}}+(N^2-1)\frac{k_c}{k_{h0}}K^{\frac{C_c}{C_{kh}}}\right] \tag{48}$$

$$D_3=2\frac{N^2-1}{N^4Y}\frac{k_{v0}}{m_{vs0}\gamma_w}\left[(N^2-1)K^{1-\frac{C_c}{C_{kv}}}+\frac{k_c}{k_{v0}}K\right] \tag{49}$$

4　控制方程的解答

4.1　方程求解

本文假设复合地基的顶面为透水边界，而底面为不透水边界。因此，竖向边界条件可以表示为

$$\left.\begin{aligned}&z=0:\overline{u}(z,t)=0\\ &z=H:\frac{\partial\overline{u}(z,t)}{\partial z}=0\end{aligned}\right\} \tag{50}$$

此外，外部荷载由复合地基各组成部分共同承担，则初始条件可以表示为

$$t=0:\overline{u}=p_0 \tag{51}$$

式中：p_0为外部荷载的初始值。

本文将采用分离变量法求解控制方程，因此非齐次偏微分方程式（46）的解可设为

$$\overline{u}(z,t)=\sum_{m=1}^{\infty}T_m(t)\sin\left(\frac{M}{H}z\right) \tag{52}$$

式中：$M=\dfrac{2m-1}{2}\pi$，m=1，2，3，…。

根据 Lu 等[40]的解法，结合边界条件式（50）和初始条件式（51）可得本文组合型复合地基的超孔隙水压力解答：

$$\overline{u}(z,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{M}\mathrm{e}^{-\beta_mt}\left[p_u\int_0^t\frac{\mathrm{d}g(\tau)}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{\beta_m\tau}\mathrm{d}\tau+p_0\right]\sin\left(\frac{M}{H}z\right) \tag{53}$$

式中：$\beta_m=\dfrac{D_1\left(\dfrac{M}{H}\right)^4-D_3\left(\dfrac{M}{H}\right)^2}{1-D_2\left(\dfrac{M}{H}\right)^2}$。

结合式（46）可得散体材料桩-不透水桩复合地基按应力定义的总平均固结度一般解：

$$U_p=\frac{\int_0^H[p(t)-\overline{u}]\mathrm{d}z}{\int_0^H p_u\mathrm{d}z}=g(t)-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{M^2}\mathrm{e}^{-\beta_mt}\left[\frac{p_0}{p_u}+\int_0^t\frac{\mathrm{d}g(\tau)}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{\beta_m\tau}\mathrm{d}\tau\right] \tag{54}$$

4.2 不同外部荷载形式下的详细解答

根据前面求解的超孔压和固结度的一般解，可以得到如图 5 所示的 4 种特殊荷载形式下的详细解答：

（1）瞬时荷载

$$\left.\begin{aligned} p_0 &= p_{\mathrm{u}} \\ g(t) &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

$$\bar{u}(z,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2p_{\mathrm{u}}}{M}\mathrm{e}^{-\beta_m t}\sin\left(\frac{M}{H}z\right) \tag{56}$$

$$U_{\mathrm{p}}=1-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{M^2}\mathrm{e}^{-\beta_m t} \tag{57}$$

（2）线性荷载

$$\left.\begin{aligned} p_0 &= p_{\mathrm{u}} \\ g(t) &= \begin{cases} \dfrac{t}{t_0}, & t\leqslant t_0 \\ 1, & t>t_0 \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

$$\bar{u}(z,t)=\begin{cases} \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2p_{\mathrm{u}}(1-\mathrm{e}^{-\beta_m t})}{M\beta_m t_0}\sin\left(\frac{M}{H}z\right), & t\leqslant t_0 \\ \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2p_{\mathrm{u}}[\mathrm{e}^{-\beta_m (t-t_0)}-\mathrm{e}^{-\beta_m t}]}{M\beta_m t_0}\sin\left(\frac{M}{H}z\right), & t>t_0 \end{cases} \tag{59}$$

$$U_{\mathrm{p}}=\begin{cases} \dfrac{t}{t_0}-\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{M^2\beta_m t_0}(1-\mathrm{e}^{-\beta_m t}), & t\leqslant t_0 \\ 1-\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{M^2\beta_m t_0}[\mathrm{e}^{-\beta_m (t-t_0)}-\mathrm{e}^{-\beta_m t}], & t>t_0 \end{cases} \tag{60}$$

（3）多级瞬时荷载

$$\left.\begin{aligned} p_0 &= p_i - p_{i-1} \\ g(t) &= \frac{p_i}{p_{\mathrm{u}}},\ t_{i-1}\leqslant t<t_i \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

$$\bar{u}(z,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{M}\left[\sum_{j=1}^{i}(p_j-p_{j-1})\mathrm{e}^{-\beta_m (t-t_{j-1})}\right]\sin\left(\frac{M}{H}z\right) \tag{62}$$

$$U_{\mathrm{p}}=\frac{p_i}{p_{\mathrm{u}}}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{M^2}\sum_{j=1}^{i}\left(\frac{p_j-p_{j-1}}{p_{\mathrm{u}}}\right)\mathrm{e}^{-\beta_m (t-t_{j-1})} \tag{63}$$

（4）多级线性荷载

$$\left.\begin{aligned} p_0 &= 0 \\ g(t) &= \begin{cases} a_{i-1}+R_i(t-t_{2i-2}), & t_{2i-2}<t<t_{2i-1} \\ a_i, & t_{2i-1}<t<t_{2i} \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

式中：$a_i=\dfrac{p_i}{p_{\mathrm{u}}}$；$R_i=\dfrac{a_i-a_{i-1}}{t_{2i-1}-t_{2i-2}}$。

$$\bar{u}(z,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2p_{\mathrm{u}}}{M\beta_m}\left\{\sum_{j=1}^{i}R_j\left[\mathrm{e}^{-\beta_m (t-t_{\mathrm{s}})}-\mathrm{e}^{-\beta_m (t-t_{2j-2})}\right]\right\}\cdot \sin\left(\frac{M}{H}z\right) \tag{65}$$

$$U_{\mathrm{p}}=g(t)-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{M^2\beta_m}\sum_{j=1}^{i}R_j\left[\mathrm{e}^{-\beta_m (t-t_{\mathrm{s}})}-\mathrm{e}^{-\beta_m (t-t_{2j-2})}\right] \tag{66}$$

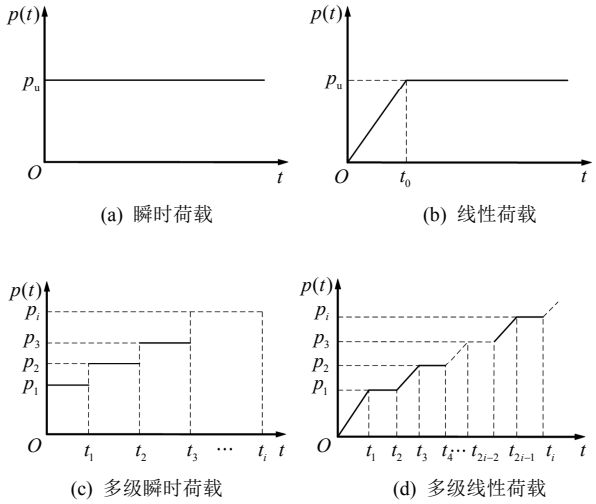


图 5 4 种外部荷载加载模式

Fig.5 Four types of external loading schemes

5 固结性状分析

本节通过参数敏感性分析研究散体材料桩-不透水桩组合型复合地基的非线性固结性状。首先，将本文模型的计算结果与已有复合地基固结模型的线性解析解进行比较。此外，对比分析不同荷载形式下各因素对地基固结速率的影响。为方便后续分析，采用径向时间因子为横坐标：

$$T_{\mathrm{h}}=\frac{k_{\mathrm{h}0}E_{\mathrm{com}}}{\gamma_{\mathrm{w}}}\frac{t}{4R_{\mathrm{n}}^2} \tag{67}$$

式中：E_{com} 为组合型复合地基的复合压缩模量。

5.1 散体材料桩固结变形的影响

复合地基的固结速率必然会随着散体材料桩桩体置换率的增大而加快，然而经验证据表明这种加速幅度也会随着置换率的增高而降低[41]。然而，传统的散体材料桩复合地基的固结理论忽视了桩体的固结变形，与实测数据对比，在计算高置换率复合地基固结度时，计算结果往往偏大。本文考虑了组

合型复合地基中散体材料桩的固结变形，图 6 对比分析了本文解答与 Lu 等[19]模型 B 的计算结果之间的差异。其中，ΔU 表示两者固结度的差值，U_p 则为本文的计算结果。如图 6 所示，复合地基的固结速率会随着散体材料桩桩体置换率的增加而迅速增大，而这种加速幅度也在逐渐减小，这与工程实践得到的结论一致。此外，可以看出，由于未考虑散体材料桩的固结变形，传统的解析模型所预测的固结速率快于本文解答，且两种模型计算出的固结度差值也随着桩体置换率的增大而增加。

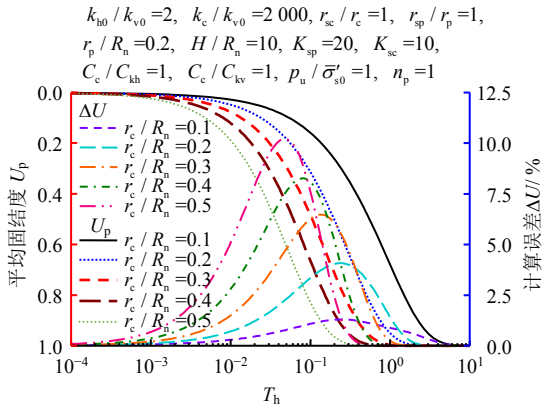


图 6　忽略散体材料桩固结变形对固结度的影响

Fig.6　Influence of ignoring the consolidation deformation of granular columns on the consolidation degree

如图 6 所示，只有当 $r_c/R_e<0.2$（井径比＞5）时误差值才会小于 5%，此时未考虑桩体固结变形所带来的误差才可以忽略不计。然而，当 $r_c/R_e=0.5$ 时两者最大误差值约 10.5%，这从理论上说明了忽略散体材料桩固结变形会高估组合型复合地基的固结速率。另外，这种高估会随桩体置换率的增大而变得更加严重，这种现象进一步强调了在固结过程中考虑散体材料桩固结变形的必要性。也就是说，传统的桩-土界面流量相等假设不再适用于高置换率散体材料桩-不透水桩组合型复合地基的固结度计算。然而，需要注意的是，在 $r_c/R_e=0.1$ 时的情况下，最大计算误差仅达到 1.3%。因此，流量相等假设对于低置换率散体材料桩、塑料排水板和砂井地基的沉降预测仍然是适用和准确的。

本文通过引入一种新的流量连续性关系（第 2.2 节假定（5））来考虑散体材料桩的固结变形。然而，卢萌盟等[21]通过考虑散体材料桩桩体内的径-竖向组合渗流，研究了桩体固结对组合型复合地基固结速率的影响。图 7 绘制了两种模型的复合地基超孔隙水压力的径向变化曲线。可以看出，本文模型计算的超孔隙水压力在散体材料桩内沿径向保持不变，而卢萌盟等[21]模型桩体内的孔压沿径向发生。卢萌盟等[21]的研究显示，随着散体材料桩水平渗透系数 k_{hc} 的增大，散体材料桩桩内孔压在逐渐增大，这是因为桩体水平渗透系数的增大会使土体内的水流流入桩体的速度变快，从而增大了桩体内的孔压。此外，如图 7 所示，两种模型计算得到的孔压随着 k_{hc} 的增加而逐渐趋于一致，当 $k_{hc}/k_h=10$ 时，桩体内的径向渗流对孔压变化几乎没有影响。因此，工程实际中，当土体与散体材料桩的渗透系数之比小于 0.1 时，可以不考虑桩内径向渗流对固结的影响。

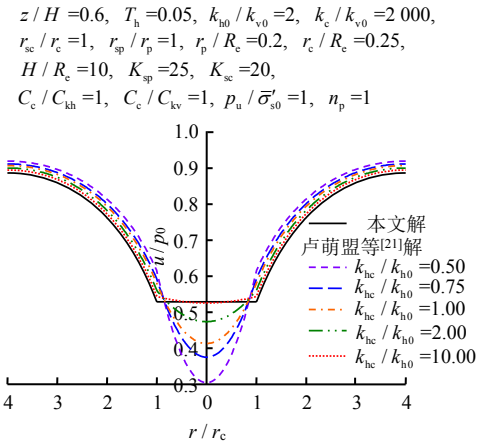


图 7　两种模型下复合地基超孔隙水压力径向变化曲线

Fig.7　Radial variation curves of excess pore water pressure within composite ground under two models

5.2　与已有模型的对比

图 8 为相同参数条件下本文模型与已有模型的计算结果的对比，包括组合型复合地基（Ye 等[17]解、Lu 等[19]模型 B 解和于春亮等[20]解）、散体材料桩复合地基（郭彪等[42]解）和不透水桩复合地基（卢萌盟等[43]解）。Berry 等[44]的研究表明，压缩指数与渗透指数之比（$C_c/C_{kh(v)}$ $C_c/C_{kh(v)}$）通常取 0.5～2，Barksdale 等[45]的研究表明，散体材料桩桩土模量比的取值一般为 10～20，本文接下来的参数取值也将参照这些研究成果来确定。

如图 8 所示，当不考虑土体的非线性固结时（$C_c/C_{kh(v)}=1$），本文解的曲线与于春亮等[20]模型基本吻合，这从一定程度上验证了本文推导的正确性；而考虑土体在固结过程中的非线性特征后（$C_c/C_{kh(v)}=1.5$），可以看出固结速率有所减缓。此外，Lu 等[19]模型 B 解的计算结果略快于本文解的原因是其未考虑散体材料桩的固结变形。与不透水桩复合地基和散体材料桩复合地基固结模型所绘

制的曲线相比，可以观察到组合型复合地基的固结速率显著加快。此外，Ye 等[17]解预测的固结速率更快的原因是该模型在推导过程中没有考虑排水板的井阻和涂抹效应。

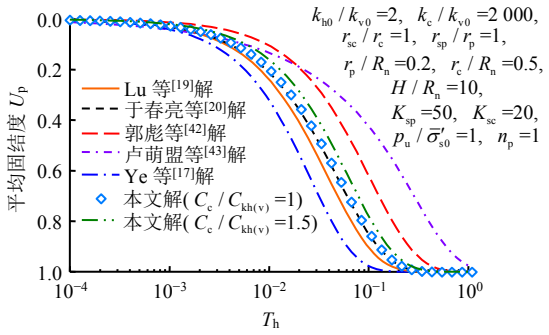


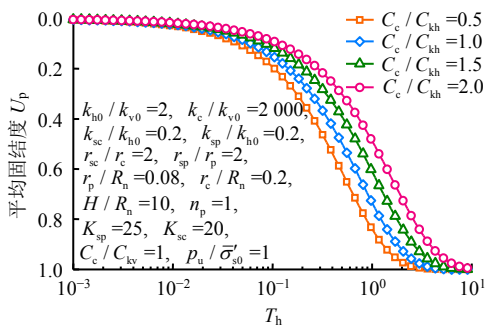
图 8 本文解与已有模型的对比

Fig.8 Comparison of the proposed model with the existing analytical solutions

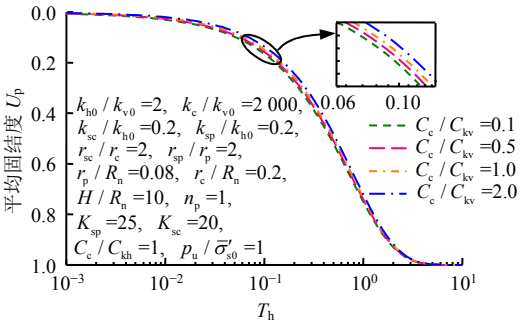
5.3 参数敏感性分析

本文在建立散体材料桩−不透水桩组合型复合地基非线性固结模型时，考虑了土体的径−竖向组合渗流。因此，压缩指数与水平和竖向渗透率指数的比值对固结速率均有影响。图 9(a)为不同 C_c/C_{kh} 值对复合地基平均固结度的影响曲线。可以看出，C_c/C_{kh} 值对复合地基的固结性状有显著影响，在附加应力不变的情况下，固结速率随着 C_c/C_{kh} 的增加明显降低，最大差值可达 27%。这种现象可以从以下两个方面理解：C_c/C_{kh} 值越大，通常意味着 C_c 值越大或 C_{kh} 值越小，较大的 C_c 值意味着固结过程中土体压缩模量的增加越小，表明固结速率会随着孔隙水的排出而变慢；而较小的 C_c/C_{kh} 值则表示土体的水平渗透系数在固结过程中降低越大，进而导致复合地基固结速率减慢。

图 9(b)分析了压缩指数与竖向渗透率指数之比 C_c/C_{kv} 对固结速率的影响。如图 9(b)所示，复合地基固结速率会随着 C_c/C_{kv} 的增加而降低，这与图 9(a)得到的趋势一致。然而，与 C_c/C_{kh} 的显著影响相比，C_c/C_{kv} 的变化对固结速率的影响很小，在计算中甚至可以忽略。造成这种现象的原因可能是因为土体的水平渗透率通常大于竖向渗透系数[46]。此外，散体材料桩的安装提供了额外的竖向排水通道，且散体材料桩的布置间距通常远小于复合地基的软土厚度[47]。相对于孔隙水到达复合地基顶面之前在土体内部所经过的竖直距离，水平排水路径将被大大缩短，因此土体内的竖向渗流对复合地基固结的贡献远小于水平渗流。



(a) 压缩指数与水平渗透指数之比（C_c/C_{kh}）



(b) 压缩指数与竖向渗透指数之比（C_c/C_{kv}）

图 9 压缩指数与渗透指数之比对固结速率的影响

Fig.9 Comparison of consolidation rate at different values of the ratio of compression index to permeability indices

当考虑土体在固结过程中的非线性特征时，不同的初始应力状态意味着土体压缩曲线上不同的压缩起点。当荷载增量相同时，土体压缩量会随压缩起点的变化而变化，因此，初始应力状态会对复合地基非线性固结性状产生影响。图 10 为瞬时荷载下复合地基在不同初始应力时的孔压消散曲线。可以看出，当 $C_c/C_{kh(v)}>1$ 时，孔隙水压力的消散速度会随着初始应力的增大而增大。在实际应用中，较大的初始应力通常意味着较大的先期固结压力和较高的土体压缩模量。显然，土体越硬，固结速率越

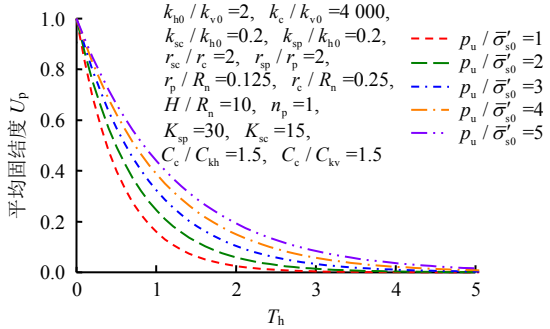


图 10 不同 $p_u/\bar{\sigma}'_{s0}$ 对复合地基非线性固结性状的影响

Fig.10 Influence of different values of $p_u/\bar{\sigma}'_{s0}$ on the nonlinear consolidation of combined composite ground

快。此外，孔压在固结初期快速消散，而随着孔隙水的排出，固结速率也在逐渐减慢。

如图 1 所示，组合型复合地基的施工场地一般有 4 种不同的布置方式。根据本文模型的单元划分方法，对于三角形/矩形、三角形密集和矩形密集布置，分析单元内的不透水桩数量分别等于 1、2 和 3。图 11 给出了三级线性荷载形式下不透水桩数量对复合地基非线性固结性状的影响。可以看出，随着单元外边界不透水桩数量的增加，极大促进了复合地基的固结进程。与三角形/矩形布置（n_p=1）相比，三角形密集布置（n_p=2）和矩形密集布置（n_p=3）的固结速率分别快了 17%和 22%。此外，固结曲线之间间距随 n_p 的增加而减小，这说明不透水桩数量对固结速率的影响并不是线性的。因此，在施工进度紧张的情况下，可以合理增加不透水桩的安装密度来提高固结效率并达到最大的经济效益。

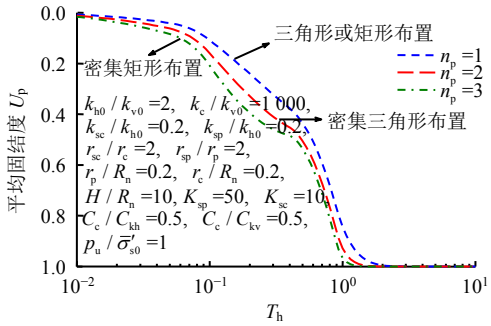


图 11　不同场地布置方式下的复合地基非线性固结性状

Fig.11　Nonlinear consolidation behavior of combined composite ground under various distribution patterns

散体材料桩的安装对组合型复合地基固结的作用主要体现在提供竖向排水通道。因此，本文在推导过程中考虑了散体材料桩的井阻效应，图 12 为不同 k_c/k_{v0} 值下的平均固结度变化情况。可以看出，

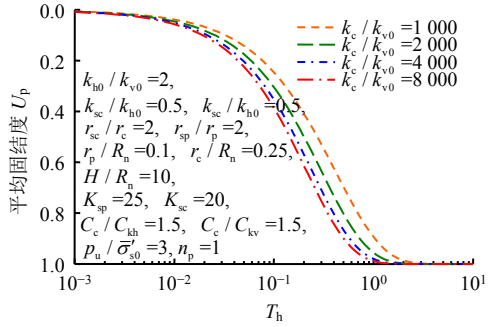


图 12　散体材料桩竖向渗透系数对固结速率的影响

Fig.12　Effect of the vertical permeability coefficient of granular columns on the consolidation rate

散体材料桩的渗透性对固结速率有显著影响。随着 k_c 的增大，复合地基固结速率明显加快。当 k_c/k_{v0} 值从 1 000 增加到 8 000 时，固结速率提高了 25%左右。这表明，在发展散体材料桩复合地基技术时应注意提高其防淤堵性能，以提高组合型复合地基在工程实践中的固结排水效率。

在组合型复合地基施工时，散体材料桩和不透水桩的打设与安装必然会对场地内土体造成一定程度的扰动，并在桩体周围形成扰动区。图 13 研究了多级线性荷载下散体材料桩扰动效应对复合地基固结速率的影响。结果表明，当扰动区内土体水平渗透系数不变的情况下，固结速率随着扰动区面积的增大而迅速减慢。因此，在复合地基工程施工时，应尽量减少对周围土体的扰动。

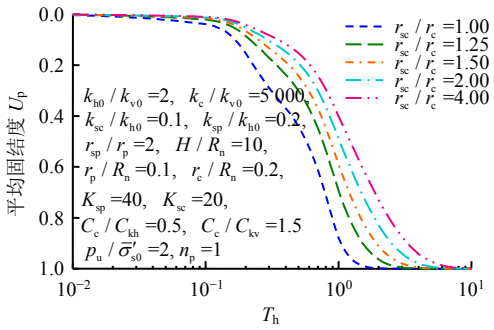


图 13　多级线性荷载下散体材料桩涂抹效应对固结速率的影响

Fig.13　Influence of disturbance effect of granular columns on the consolidation rate under multiple-stage linear loading

在工程实践中，散体材料桩和不透水桩已被处理的相对密实，其压缩模量不应随固结而增加。而卢萌盟等[33]在研究复合地基的非线性固结特性时，为简化计算，假设桩−土压缩模量比在固结过程中保持不变，这必然会导致较大的计算误差。在此背景下，本文建立数学模型时考虑了桩−土压缩模量比随固结的变化。图 14 为散体材料桩、不透水桩和土体压缩模量比变化条件下对复合地基固结速率的影响。需要注意的是，这里选取的土体积压缩系数为初始值。

如图 14 所示，当散体材料桩与土体的压缩模量比值保持不变时，复合地基的固结速率随着不透水桩压缩模量的增加而提高。不透水桩的压缩模量是散体材料桩和土体的数倍，根据等应变假定，高压缩模量将引起应力集中效应，这也是不透水桩在组合型复合地基中的主要作用。另一方面，在不透水桩和土体的压缩模量比值不变的条件下，增加散体

材料桩的压缩模量也可加快复合地基固结。这是因为，两种桩体压缩模量增大均可导致复合地基的复合压缩模量提高，而固结系数和压缩模量成正比，复合地基固结速率将随固结系数增大而加快。

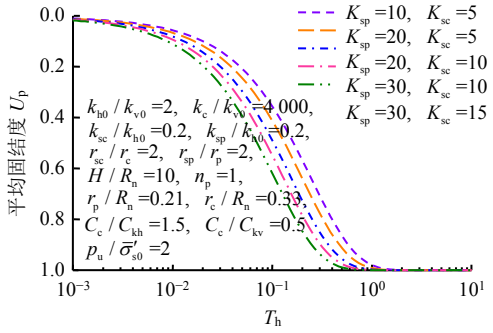


图 14 压缩模量比对复合地基非线性固结性状的影响

Fig.14 Influence of the confined compression modulus ratio on the nonlinear consolidation behavior

6 案例分析

本节将通过案例分析来论证所提出的组合型复合地基非线性固结解析模型的准确性和可靠性。由于未收集到合适的散体材料桩−不透水桩复合地基固结试验数据，本节将考虑特殊情况，首先将模型退化为散体材料桩复合地基固结模型，并与室内模型试验的数据进行对比；再将模型退化为不透水桩−排水板组合型复合地基固结模型，并与现场实测数据进行比较。

6.1 案例 1

Tai 等[48]通过模型试验研究了散体材料桩对加固地基固结沉降的影响。散体材料桩是用从澳大利亚新南威尔士州伍伦贡附近的采石场获得的破碎玄武岩制作而成，并在模型试验重选用商品高岭土作为基质土体。根据模型试验结果和前人的研究，Tai 等[48]提供的所有计算参数如表 1 所示。此外，试验采用刚性透水活塞来施加顶部荷载，使其达到等应变条件，且加载过程为多级瞬时加载，如图 15 所示。

根据 Tai 等[48]模型试验的实测数据，加荷 15 d 后达到最终沉降为 22 mm。图 15 为本文解答、Xie 等[49]未考虑散体材料桩固结变形的复合地基固结解与试验数据的对比。结果表明：本文解预测结果与实测数据十分吻合，这从一定程度上验证了本文模型的合理性与可靠性；而 Xie 等[49]模型会高估复合地基的固结速率，其预测的固结速率比实测数据最多快 12%。此外，可以观察到，无论是本文解还是 Xie 等[49]解，所预测的固结速率始终快于实测数据，这可能是由于在试验过程中土颗粒会进入桩体造成淤堵，从而降低了散体材料桩的渗透性并减缓了实际固结速率。

表 1 计算参数及其取值[48]

Table 1 The calculation parameters and values[48]

H / m	r_c / m	r_s / m	R_e / m	k_c /(10^{-5} m·s^{-1})	k_{h0} /(10^{-9} m·s^{-1})	k_{v0} /(10^{-9} m·s^{-1})	k_s /(10^{-10} m·s^{-1})	m_{vs0} / MPa^{-1}	m_{vc} / MPa^{-1}	C_c/C_{kh}	C_c/C_{kv}
0.6	0.055	0.082 5	0.15	3	1.3	0.065	1.3	30	1	1.7	1.3

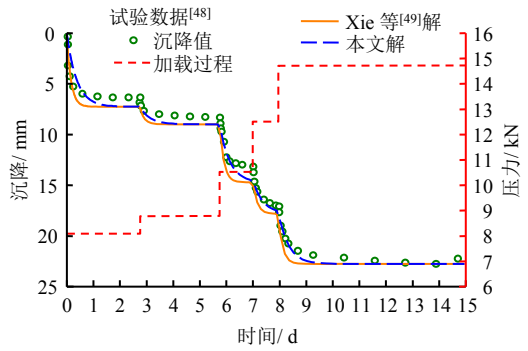


图 15 加荷过程及试验数据与模型预测沉降量的对比

Fig.15 Loading process and comparison of settlement between test data and model predictions

6.2 案例 2

Liu 等[2]在江苏省淮盐高速公路软土路基加固工程中进行了不透水桩联合塑料排水板组合型复合地基的现场试验，本文取 K19+688～K19+798 试验段数据进行对比验证。在本次现场试验中，不透水桩与排水板以三角形布置形式安装，打设深度均为 13 m，各自间距为 2.2 m，故 n_p 取为 1。不透水桩的截面半径为 250 mm，而使用的排水板是工程中常用的一种横截面积很小、周长相对较大的排水板，宽 100 mm，厚 4 mm。根据工程背景和实验室测试结果，本文的计算参数及取值如表 2 所示[2, 16]。

试验开始后先向软土中打设塑料排水板，然后再进行不透水桩的安装，在不透水桩施工结束的一个月后开始进行路堤填筑。第 1 次路堤填筑的过程被分为了 6 个阶段共 95 d，堆载高度达到了 2.5 m。为了便于后续的计算和分析，将这 95 d 的填筑过程

视为匀速加载。第 1 次路堤填筑过程在 5 d 内完成，总堆载高度达到 4 m，之后保持不变。因此，在本文计算过程中，路堤填筑过程被简化为了两个阶段，即两级线性荷载形式，具体的路堤填筑和近似加载过程如图 16 所示。

根据 Liu 等[2]现场试验的实测数据，堆载近 260 d 后地基的最终沉降为 145 mm。图 15 显示了本文解答和 Lu 等[19]模型 B 解与现场试验数据的对比。可以看出，当加载 125 d 即固结度达到 40%后，本文解与 Lu 等[19]模型 B 解和实测数据吻合较好。然而，由于未考虑固结过程中土体的非线性特征，Lu 等[19]模型 B 解会高估复合地基的固结速率，这一趋势在固结后期尤为明显。此外，可以观察到，在固结早期两种模型计算结果与实测数据总有约 10.3%的误差。造成这种现象的原因有以下两点：①排水板和不透水桩施工时可能已经导致了孔隙水压力的消散，而工程现场在施工完成后一个月后才开始监测沉降，这使得实测数据的初始沉降达到了 15 mm 左右；②本文为简化计算和编程，将原先第 1 次路堤填筑过程简化为了匀速线性加载，而近似加载过程慢于原先实际加载过程，这使得模型预测沉降始终低于实测数据。

表 2　基本参数及取值[2, 16]

Table 2　Basic parameters and values[2, 16]

H / m	r_c / m	r_p / m	R_n / m	r_{sc} / m	r_{sp} / m	k_c /(10^{-5} m·s^{-1})	k_{h0} /(10^{-9} m·s^{-1})	k_{v0} /(10^{-9} m·s^{-1})	k_{sc} /(10^{-10} m·s^{-1})	k_{sp} /(10^{-10} m·s^{-1})	m_{vp} / MPa^{-1}	m_{vc} / MPa^{-1}	m_{vs0} / MPa^{-1}	C_c / C_{kh}	C_c / C_{kv}
13	0.025	0.25	1.155	0.075	0.5	1.3	1.3	1.63	5.42	8.15	0.04	0.6	0.6	0.5	0.5

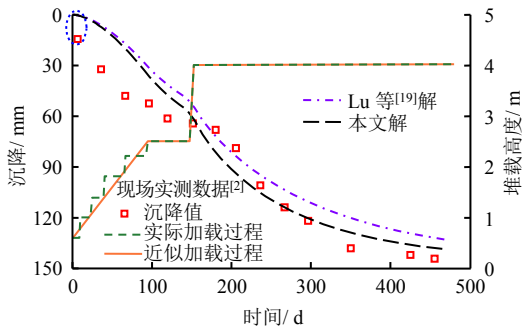


图 16　路堤填筑过程及试验数据与模型预测沉降量的对比

Fig.16　The embankment filling process and comparison of settlement between test data and model predictions

7　结　论

针对目前组合型复合地基非线性固结理论研究较少的问题，本文采用 e-lgσ' 和 e-lg$k$ 对数模型探究固结过程中土体的非线性特性，提出了一种预测高置换率散体材料桩−不透水桩复合地基非线性固结的解析模型。在推导过程中，考虑了散体材料桩的固结变形以及桩−土模量比随固结的变化。此外，还综合考虑了散体材料桩井阻效应、桩体施工扰动效应和土体内径−竖向组合渗流，基于等应变假设和达西定律，得到了不同荷载形式下的固结解析解。

然后，与现有的不同复合地基固结解析模型进行了比较，并通过参数敏感性分析研究组合型复合地基的非线性固结性状，讨论了各参数对固结速率的影响。最后，将本文解答与模型试验和现场实测数据进行了对比。与以往的研究相比，本文模型能够清晰地区分施工场地中散体材料桩和不透水桩的分布规律，更符合工程实际情况。主要结论如下：

（1）在不考虑土体非线性特征的情况下，本文解答与已有模型计算结果基本吻合，间接证明了解析模型的合理性；另外，通过与模型试验和现场实测数据对比，进一步验证了本文模型的有效性与准确性。

（2）忽略散体材料桩的固结变形会高估组合型复合地基的固结速率，且随着散体材料桩置换率的增加，高估程度会逐渐升高。

（3）本文解答的计算结果明显快于其他一元复合地基固结模型，这从理论上论证了散体材料桩联合不透水桩可以更有效地加固软土地基并加快工程进度。

（4）压缩指数与水平渗透指数之比（C_c / C_{kh}）对复合地基的非线性固结性状有较大影响，固结进程将随着 C_c / C_{kh} 的增大而迅速减缓；而 C_c / C_{kv} 的变化对固结速率的影响较小，在实际应用中甚至可以忽略。

（5）初始应力状态会对复合地基非线性固结性状产生较大影响，当 $C_c / C_{kh(v)} > 1$ 时，孔隙水压力的消散速度会随着外部荷载最大值与初始应力之比（$p_u / \bar{\sigma}'_{s0}$）的减小而增大。

（6）施工场地布置越密集、桩−土压缩模量比越大、散体材料桩竖向渗透系数越大或涂抹半径越小，均会导致复合地基固结加快。

参 考 文 献

[1] 王土杰, 何满潮, 朱常志, 等. GC 与 CFG 桩组合型复合地基承载特性研究[J]. 岩土力学, 2008, 29(10): 2632-2636.
WANG Shi-jie, HE Man-chao, ZHU Chang-zhi, et al. Research on bearing properties of composite foundation integrated by CFG piles and gravel piles[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2008, 29(10): 2632-2636.

[2] LIU S Y, HAN J, ZHANG D W, et al. A combined DJM-PVD method for soft ground improvement[J]. **Geosynthetics International**, 2008, 15(1): 43-54.

[3] 李波, 黄茂松, 程岳, 等. 路堤荷载下长短组合型复合地基现场试验与数值模拟[J]. 中国公路学报, 2013, 26(1): 9-14.
LI Bo, HUANG Mao-song, CHENG Yue, et al. Field test and numerical analysis of composite foundation with long and short piles under embankment[J]. **China Journal of Highway and Transport**, 2013, 26(1): 9-14.

[4] ZHAO T, WANG W Y, ZHANG P X. Static test and result analysis on different types of pile composite foundation in the same field[C]//MATEC Web of Conferences. [S. l.]: EDP Sciences, 2015.

[5] 沈宇鹏, 田亚护, 冯瑞玲. GC-CFG 组合桩复合地基处理高速铁路基底的应用研究[J]. 土木工程学报, 2013, 46(2): 136-142.
SHEN Yu-peng, TIAN Ya-hu, FENG Rui-ling. Study on treatment of GC-CFG composite piles to base of high-speed railway[J]. **China Civil Engineering Journal**, 2013, 46(2): 136-142.

[6] ZHANG M, ZHANG X F. A field experimental study of composite foundation with CFG pile plus vibro-replacement stone column pile in liquefaction area[C]//2017 2nd International Symposium on Advances in Electrical, Electronics and Computer Engineering (ISAEECE 2017). [S. l.]: Atlantis Press, 2017: 75-78.

[7] 李继才, 曹军, 丛建. 组合型水泥粉煤灰碎石桩(CFG桩)复合地基在深厚软基处理中的应用[J]. 水运工程, 2018, 548(11): 156-161, 198.
LI Ji-cai, CAO Jun, CONG Jian. Application of combined composite foundation with CFG pile in deep soft foundation treatment[J]. **Port & Waterway Engineering**, 2018, 548(11): 156-161, 198.

[8] 刘维正, 冯瑜, 吴民晖, 等. 机场高填方红黏土地基GC-CFG 组合桩处理试验研究[J]. 铁道科学与工程学报, 2023, 20(1): 156-168.
LIU Wei-zheng, FENG Yu, WU Min-hui, et al. Experimental study on GC-CFG composite pile treatment of airport high fill red clay foundation[J]. **Journal of Railway Science and Engineering**, 2023, 20(1): 156-168.

[9] 周志军, 陈昌富, 肖水强. 可控刚性桩与排水体组合型复合地基受力与变形特性的模型试验研究[J]. 岩土工程学报, 2020, 42(12): 2308-2315.
ZHOU Zhi-jun, CHEN Chang-fu, XIAO Shui-qiang. Model test study on mechanical and deformation characteristics of composite foundation with controllable rigid pile and drainage body[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2020, 42(12): 2308-2315.

[10] 梁亮, 王士杰, 刘青. GC 与 CFG 多桩型复合地基抗液化数值分析[J]. 建筑科学, 2017, 33(1): 11-16.
LIANG Liang, WANG Shi-jie, LIU Qing. Numerical analysis of liquefaction resistance of multi-type-pile composite foundation with GC pile and CFG pile[J]. **Building Science**, 2017, 33(1): 11-16.

[11] 陈蕾, 刘松玉, 洪振舜. 排水粉喷桩复合地基固结计算方法的探讨[J]. 岩土工程学报, 2007, 29(2): 198-203.
CHEN Lei, LIU Song-yu, HONG Zhen-shun. Study of consolidation calculation of soft ground improved by dry jet mixing combined with vertical drain method[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2007, 29(2): 198-203.

[12] 秦康, 卢萌盟, 蒋斌松. 砂井联合水泥土搅拌桩复合地基固结解析解[J]. 岩土力学, 2014, 35(增刊 2): 223-231.
QIN Kang, LU Meng-meng, JIANG Bin-song. Analytical solution for consolidation of composite foundation with sand drains and cement-soil mixing piles[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2014, 35(Suppl.2): 223-231.

[13] YE G B, ZHANG Q W, ZHANG Z, et al. Centrifugal modeling of a composite foundation combined with soil-cement columns and prefabricated vertical drains[J]. **Soils and Foundations**, 2015, 55(5): 1259-1269.

[14] 杨涛, 李超. 刚性基础下组合渗流碎石桩−不排水桩复合地基固结分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2018, 37(11): 2631-2640.
YANG Tao, LI Chao. Consolidation analysis of stone column-impervious pile composite ground underneath rigid foundation considering radial and vertical flows within stone columns[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2018, 37(11): 2631-2640.

[15] ZHANG L T, WANG L, ZHOU A N, et al. Semi-analytical solutions to the consolidation of unsaturated

composite ground enforced by stone columns under equal strain condition considering smear effect[J]. **Transportation Geotechnics**, 2021, 31: 100644.

[16] ZHANG D W, LIU S Y, HONG Z S. Consolidation calculating method of soft ground improved by DJM-PVD combined method [C]//Proceedings of the Geoshanghai International Conference 2006. Shanghai: ASCE, 2006: 29-36.

[17] YE G B, ZHANG Z, XING H F, et al. Consolidation of a composite foundation with soil-cement columns and prefabricated vertical drains[J]. **Bulletin of Engineering Geology and the Environment**, 2012, 71: 87-98.

[18] ZHANG Z, YE G B, XING H F. Consolidation analysis of soft soil improved with short deep mixed columns and long prefabricated vertical drains (PVDs)[J]. **Geosynthetics International**, 2015, 22(5): 366-379.

[19] LU M M, JING H W, ZHOU A N, et al. Analytical models for consolidation of combined composite ground improved by impervious columns and vertical drains[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 2018, 42(6): 871-888.

[20] 于春亮, 张爱军, 赵庆玉, 等. 透水桩与不透水桩组合型复合地基固结解析分析[J].岩土力学, 2017, 38(11): 3255-3260.
YU Chun-liang, ZHANG Ai-jun, ZHAO Qing-yu, et al. Analytical analysis for consolidation of composite foundation reinforced by permeable and impermeable piles[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2017, 38 (11): 3255-3260.

[21] 卢萌盟, 敖祖瑞, 李东旭, 等. 高置换率散体材料桩−不透水桩多元组合桩复合地基固结分析[J]. 岩土工程学报, 2021, 43(7):1253-1260.
LU Meng-meng, AO Zu-rui, LI Dong-xu, et al. Consolidation analysis of composite foundation with multiple and reinforcements by granular columns with high replacement ratio impervious piles[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2021, 43(7): 1253-1260.

[22] 武崇福, 李文雪, 李文涛, 等. 分级加载下组合渗流碎石桩-CFG 桩复合地基固结解答[J]. 中国公路学报, 2022, 35(8): 140-150.
WU Chong-fu, LI Wen-xue, LI Wen-tao, et al. Consolidation solution of composite foundation of composite seepage gravel pile and CFG pile under graded loading[J]. **Journal of China Highway Engineering**, 2022, 35(8): 140-150.

[23] 张玉国, 万东阳, 郑言林, 等.考虑径向渗透系数变化的真空预压竖井地基固结解析解[J]. 岩土力学, 2019, 40(9): 3533-3541.
ZHANG Yu-guo, WAN Dong-yang, ZHENG Yan-lin, et al. Analytical solution for consolidation of vertical drain under vacuum preloading considering the variation of radial permeability coefficient[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2019, 40(9): 3533-3541.

[24] LIU S J, GENG X Y, SUN H L, et al. Nonlinear consolidation of vertical drains with coupled radial-vertical flow considering time and depth dependent vacuum pressure[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 2019, 43(4): 767-780.

[25] TIAN Y, WU W B, WEN M J, et al. Nonlinear consolidation of soft foundation improved by prefabricated vertical drains based on elliptical cylindrical equivalent model[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 2021, 45(13): 1949-1971.

[26] LEKHA K R, KRISHNASWAMY N R, BASAK P. Consolidation of clay by sand drain under time-dependent loading[J]. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, 1998, 124(1): 91-94.

[27] INDRARATNA B, RUJIKIATKAMJORN C, SATHANANTHAN I. Radial consolidation of clay using compressibility indices and varying horizontal permeability[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 2005, 42(5): 1330-1341.

[28] 王洁, 李传勋, 郭霄, 等. 考虑井阻时空变化的竖井地基非线性固结解析解[J]. 岩土力学, 2022, 43(10): 2828-2840.
WANG Jie, LI Chuan-xun, GUO Xiao, et al. Analytical solution for nonlinear consolidation of soft soil with vertical drains by considering time-and depth-variation of well resistance[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2022, 43(10): 2828-2840.

[29] LU M M, WANG S Y, SLOAN S W, et al. Nonlinear consolidation of vertical drains with coupled radial-vertical flow considering well resistance[J]. **Geotextiles and Geomembranes**, 2015, 43(2): 182-189.

[30] WANG C, XU Y F. Semi-analytical solution of consolidation for composite ground[J]. **Mechanics Research Communications**, 2013, 48: 24-31.

[31] 蔡燕燕, 王海, 戚志博, 等. 考虑土体非线性的 CCSG 桩复合地基固结解[J]. 岩土力学, 2015, 36(增刊 1): 639-645.

CAI Yan-yan, WANG Hai, QI Zhi-bo, et al. Analytical solution for consolidation of CCSG pile composite foundation by considering nonlinearity of soil[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2015, 36(Supp.1): 639-645.

[32] 周亚东, 翟鑫东, 李顺群, 等. 碎石桩复合地基大变形非线性固结模型[J]. 岩土力学, 2022, 43(10): 2777-2784.
ZHOU Ya-dong, ZHAI Xin-dong, LI Shun-qun, et al. Nonlinear consolidation model of stone column composite foundation considering large strain[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2022, 43(10): 2777-2784.

[33] 卢萌盟, 谢康和, 王玉林, 等. 碎石桩复合地基非线性固结解析解[J]. 岩土力学, 2010, 31(6): 1833-1840.
LU Meng-meng, XIE Kang-he, WANG Yu-lin, et al. Analytical solution for nonlinear consolidation of stone column reinforced composite ground[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2010, 31(6): 1833-1840.

[34] 赵明华, 陈侃, 刘猛, 等. 考虑桩体压缩变形的碎石桩复合地基非线性固结分析[J]. 公路交通科技, 2015, 32(6): 46-53.
ZHAO Ming-hua, CHEN Kan, LIU Meng, et al. Analysis of nonlinear consolidation of gravel pile composite foundation considering compression deformation of pile[J]. **Journal of Highway and Transportation Research and Development**, 2015, 32(6): 46-53.

[35] INDRARATNA B, BASACK S, RUJIKIATKAMJORN C. Numerical solution of stone column–improved soft soil considering arching, clogging, and smear effects[J]. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, 2013, 139(3): 377-394.

[36] LU M M, SLOAN S W, INDRARATNA B, et al. A new analytical model for consolidation with multiple vertical drains[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 2016, 40(11): 1623-1640.

[37] DEB K, SHIYAMALAA S. Effect of clogging on rate of consolidation of stone column–improved ground by considering particle migration[J]. **International Journal of Geomechanics**, 2016, 16(1): 04015017.

[38] LU M M, JING H W, ZHOU Y, et al. General analytical model for consolidation of stone column-reinforced ground and combined composite ground[J]. **International Journal of Geomechanics**, 2017, 17(6): 04016131.

[39] 谢康和, 曾国熙. 等应变条件下的砂井地基固结解析理论[J]. 岩土工程学报, 1989, 11(2): 3-17.
XIE Kang-he, ZENG Guo-xi. Analytical theory for consolidation of sand drain under equal strain assumption[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 1989, 11(2): 3-17.

[40] LU M M, XIE K H, GUO B. Consolidation theory for a composite foundation considering radial and vertical flows within the column and the variation of soil permeability within the disturbed soil zone[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 2010, 47(2): 207-217.

[41] The Overseas Coastal Area Development Institute of Japan. Technical Standards and Commentaries for Port and Harbour Facilities in Japan[M]. Tokyo: Daikousha Printing Company Limited, 2009.

[42] 郭彪, 龚晓南, 李亚军. 考虑桩体径竖向渗流的碎石桩复合地基固结解析解[J]. 岩土工程学报, 2017, 39(8): 1485-1492.
GUO Biao, GONG Xiao-nan, LI Ya-jun. Analytical solution for consolidation of stone column-reinforced foundations considering radical and vertical flows in columns[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2017, 39(8): 1485-1492.

[43] 卢萌盟, 谢康和, 周国庆, 等. 不排水桩复合地基固结解析解[J]. 岩土工程学报, 2011, 33(4): 574-579.
LU Meng-meng, XIE Kang-he, ZHOU Guo-qing, et al. Analytical solution for consolidation of composite ground with impervious pile[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2011, 33(4): 574-579.

[44] BERRY P L, WILKINSON W B. The radial consolidation of clay soils[J]. **Geotechnique**, 1969, 19(2): 253-284.

[45] BARKSDALE R D, BACHUS R C. Design and construction of stone columns, vol. I[R]. Mclean County: Turner-Fairbank Highway Research Center, 1983.

[46] BARI M W, SHAHIN M A, NIKRAZ H R. Probabilistic analysis of soil consolidation via prefabricated vertical drains[J]. **International Journal of Geomechanics**, 2013, 13(6): 877-881.

[47] ONOUE A. Diagrams considering well resistance for designing spacing ratio of gravel drains[J]. **Soils and Foundations**, 1988, 28(3): 160-168.

[48] TAI P, INDRARATNA B, RUJIKIATKAMJORN C. Experimental simulation and mathematical modelling of clogging in stone column[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 2018, 55(3): 427-436.

[49] XIE K H, LU M M, HU A F, et al. A general theoretical solution for the consolidation of a composite foundation[J]. **Computers and Geotechnics**, 2009, 36(1-2): 24-30.